

Jagiellońskie Warsztaty Olimpijskie 2025/2026

Spotkanie 1 (18 października 2025)

Dominik Bysiewicz, Kacper Piotrowski, Anatoli Shatsila

PRZEKSZTAŁCENIA ALGEBRAICZNE

Zadanie 1. Liczby $x, y > 1$ spełniają równanie $x^x + y^y = x^y + y^x$. Udowodnij, że $x = y$.

Zadanie 2. Niech a, b, c będą niezerowymi liczbami rzeczywistymi takimi że $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$. Udowodnij, że

$$\frac{1}{a^{2025}} + \frac{1}{b^{2025}} + \frac{1}{c^{2025}} = \frac{1}{a^{2025} + b^{2025} + c^{2025}}$$

Zadanie 3. Niech $a, b, c \in \mathbb{Q}$ spełniają $ab + bc + ca = 1$. Udowodnij, że liczba $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$ jest kwadratem liczby wymiernej.

Zadanie 4. Parami nieprzeciwne liczby a, b, c spełniają równość $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Udowodnij, że $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$.

Zadanie 5. Dane są liczby rzeczywiste x, y, z spełniające $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z} = \frac{9}{10}$, $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = \frac{51}{10}$. Znajdź $x + y + z$.

Zadanie 6. Dane są liczby rzeczywiste a, b i c spełniające równości

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc = 5 \quad \text{oraz} \quad a + b + c = 3.$$

Wykaż, że co najmniej jedna z liczb a, b, c jest równa 2.

Zadanie 7. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich (x, y) takie, że $x^4y + xy^4 - 4x^3 - 4y^3 + x^3y^3 - 3x^2y^2 - 4xy$ jest liczbą pierwszą.

Zadanie 8. Niech $f(x) = \frac{2}{4^x + 2}$. Znaleźć

$$f\left(\frac{1}{2025}\right) + f\left(\frac{2}{2025}\right) + \dots + f\left(\frac{2024}{2025}\right)$$

Zadanie 9. Liczby wymierne a i b spełniają równanie $a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0$. Udowodnij, że $1 - ab$ jest kwadratem liczby wymiernej.

Zadanie 10. Udowodnij że liczba

$$\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2024^2} + \frac{1}{2025^2}}$$

jest wymierna.

Zadanie 11. Dane są liczby rzeczywiste x, y takie że $x \neq 0$, $y \neq 0$, $xy + 1 \neq 0$ oraz $x + y \neq 0$. Załóżmy że liczby $x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}$ i $x^3 + \frac{1}{x^3} + y^3 + \frac{1}{y^3}$ są wymierne. Udowodnij że liczba $x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2}$ też jest wymierna.

Zadanie 12. Niech a, b, c, d będą dodatnimi liczbami całkowitymi takimi że

$$ad = b^2 + bc + c^2$$

Udowodnić, że $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ jest liczbą złożoną.

Zadanie 13. Liczby wymierne a i b spełniają warunek

$$a^3 + 4a^2b = 4a^2 + b^4$$

Udowodnij, że $\sqrt{a}$ jest liczbą wymierną.

Zadanie 14. Udowodnij, że liczba $512^3 + 675^3 + 720^3$ jest złożona.

Zadanie 15. Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają równania

$$abc - d = 1, \quad bcd - a = 2, \quad cda - b = 3, \quad dab - c = -6.$$

Udowodnij, że $a + b + c + d \neq 0$.